Année Scolaire 2024 - 2025 Inspection d'Académie de Fatick	MATHÉMATIQUES TleS1
Cellule Zonale Mathématique - Zone 1	Devoir N°2 du Premier Semestre

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (05,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. On pose : $P(z) = z^3 - (2+6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$ où $z \in \mathbb{C}$

a- Montrer que P admet une racine imaginaire z_0 que l'on précisera. **(0,5pt)**

b- Factoriser le polynôme P puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$ **(0,75pt)**

c- En déduire les solutions de l'équation $z^6 - (2+6i)z^4 - 11z^2 - 8 + 6i = 0$ **(01pt)**

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équations $P(z) = 0$

a- Sachant que $|z_A| < |z_B| < |z_C|$, placer les points A, B et C **(0,75pt)**

b- On considère l'application S d'expressions complexe $z' = az + b$
Déterminer a et b si $S(A) = A$ et $S(C) = B$ **(0,5pt)**

c- Déterminer le module de a. On note θ un argument de a **(0,25pt)**

d- Montrer que $cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et que $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **(0,5pt)**

3. Soit l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tels que :
$z' = \frac{3+i}{8}z - \frac{5-i}{8}$. Soit le point $M_0(3\,;4)$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose
$M_{n+1} = f(M_n)$. Soit z_n l'affixe du point M_n

a- Vérifier que l'affixe z_1 du $\mathbb{P}/M_1$ est $z_1 = 2i$ **(0,25pt)**

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $z_n = -1 + \left(\frac{3+i}{8}\right)^n (4+4i)$ **(0,5pt)**

c- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$
Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ **(0,5pt)**

Exercice 2 : (05,5 points)

On considère dans le plan complexe les points
$A\left(\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)\right)$, $B(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$, $C\left(\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 2)\right)$ et $D(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + i\sqrt{2})$
On considère G et G' deux points tels que :
$G = bar\{(A,1);\ (C,1);\ (D,1)\}$ et $G' = bar\{(A,1);\ (B,1);\ (D,1)\}$

1. Déterminer et construire l'ensemble :
$E_M = \{M \in \mathbb{P} \,/\, \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\|\}$ **(0,5pt)**

2. Déterminer et construire l'ensemble $F_M = \{M \in \mathbb{P} \,/\, MA^2 - 2MD^2 + MC^2 = 16\}$ **(0,5pt)**

3. Soit f la fonction scalaire de Leibniz définie par : $f(M) = 3MA^2 + MC^2 + 2MD^2$

a- Vérifier que B est le milieu de $[AC]$ puis écrire G' comme barycentre de A, C et D **(0,5pt)**

b- Montrer que $f(M) = 6MG'^2 - \frac{104}{3}$ pour tout point M du plan **(0,5pt)**

c- Discuter suivant les valeurs de k la nature de $(E_k) = \{M \in \mathbb{P} \,/\, f(M) = k\}$ **(0,25pt)**

d- Déterminer la valeur de k pour laquelle (E_k) contienne le point G **(0,5pt)**

e- Déterminer puis construire $(G_M) = \left\{M \in \mathbb{P} \,/\, -16 \leq f(M) \leq \frac{58}{3}\right\}$ **(0,5pt)**

4. Soit l'ensemble $(\Gamma) = \left\{M \in \mathbb{P} \,/\, (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = \frac{77}{9}\right\}$

a- On désigne par I le milieu de $[G'B]$. Calculer $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GG'}$ **(0,25pt)**

b- En déduire la nature exacte du triangle BGG' **(0,25pt)**

c- Montrer que (Γ) peut s'écrire sous la forme $MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GI} = \frac{77}{9}$ **(0,5pt)** d- E est le point tel que $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GI}$. Montrer que (Γ) équivaut à : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{ME} = \frac{77}{9}$ **(0,5pt)**

e- Montrer que $MI^2 = 9$. En déduire la nature de (Γ) puis le construire **(0,75pt)**

Problème : (09 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par : $f(x) = \frac{2}{3}cosx + \frac{1}{3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Partie A :

1. Etudier f et construire la courbe (C) **(0,75pt)**
2. a- Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ;\ \pi]$ vers un intervalle I que l'on précisera **(0,25pt)**
   On note g la fonction réciproque de f sur I
   b- Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur I, puis construire la courbe (C') de g **(0,75pt)**
3. a- Montrer que (C) coupe (Δ): $y = x$ en un seul point d'abscisse $x_0 \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ **(0,5pt)**
   b- Calculer, en fonction de x_0, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les deux axes du repère et les courbes (C) et (C') **(0,5pt)**

Partie B :

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 \in]0\ ;\ x_0[\\ U_{n+1} = f(U_n)\ , \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ **(0,5pt)**
   On admet pour la suite de l'exercice que $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_{2n} \leq x_0 \leq U_{2n+1}$
2. Montrer que : $\forall\ x \in [0\ ;\ \pi]$, $|f(x) - x_0| \leq \frac{2}{3}|x - x_0|$ **(0,5pt)**
3. a- En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0|$ **(0,25pt)**
   b- En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera **(0,25pt)**
4. Pour tout entier naturel n, on définit la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(U_k - x_0)$

a- Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $(-1)^{k+1}(U_k - x_0) > 0$ **(0,25pt)**

b- Montrer que la suite (S_n) est une suite strictement croissante **(0,25pt)**

c- Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 |U_0 - x_0|$, et conclure sur de la convergence de (S_n) **(0,5pt)**

Partie C :

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$, on pose :

$F(x) = \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$ et $G(x) = \int_0^{f(x)} \frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$

1. a- Montrer que F est dérivable sur $]0\ ;\ \pi[$ puis calculer $F'(x)$ **(0,5pt)**
   b- Montrer que G est dérivable sur $]0\ ;\ \pi[$ puis calculer $G'(x)$ **(0,5pt)**
   c-Exprimer $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x **(0,5pt)**
2. Pour tout réel $\alpha \in]0\ ;1[$, on pose :
   $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$, $J(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$ et $K(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}dt$

a- Calculer $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ **(0,5pt)**

b- Calculer les limites suivantes : $\lim_{\alpha\to 1^-} I(\alpha)$ et $\lim_{\alpha\to 1^-} J(\alpha)$ **(0,5pt)**

c- Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}\ ;1\right[$, on pose $\varphi(x) = x\sqrt{(1-x)(1+3x)}$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $\varphi'(x) = \frac{a + bx + cx^2}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}$ **(0,25pt)**

d- En déduire $K(\alpha)$ en fonction de (α) , $J(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ puis calculer $\lim_{\alpha\to 1^-} K(\alpha)$ **(0,5pt)**

3. Pour tout nombre réel $\alpha \in]0\ ;1[$, on pose : $L(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sqrt{(1-x)(1+3x)}dt$
   Exprimer $L(\alpha)$ en fonction de (α) , $J(\alpha)$ et $K(\alpha)$. En déduire $\lim_{\alpha\to 1^-} L(\alpha)$ **(0,5pt)**

Bonne Réflexion !